Autour de la variance comme forme de Dirichlet : filtrations et résolution de l'identité, contractions et BMO, espérances conditionnelles et principe complet du maximum

Nicolas Bouleau

AUTOUR DE LA VARIANCE COMME FORME DE DIRICHLET : FILTRATIONS ET RESOLUTIONS DE L'IDENTITE CONTRACTIONS ET BMO, ESPERANCES CONDITIONNELLES ET PRINCIPE COMPLET DU MAXIMUM.

Nicolas BOULEAU
CERMA-ENPC
28, rue des Saints Péres
75007 - PARIS

Nicolas BOULEAU
EQUIPE D'ANALYSE
Université Paris VI
TOUR 46 - 4éme Etage
75252 PARIS CEDEX 05

By using the property that the conditional variance of real random variables is a Dirichlet form, a caracterisation is given of self-adjoint operators whose resolution of identity comes from a family of conditional expectations. This also enables us to enlighten the fact that contractions act on bmo, and to prove that positive mixtures of conditional expectations satisfy the complete maximum principle.

Notre propos est de voir quel parti on peut tirer de la remarque que la variance d'une variable aléatoire réelle ou sa variance conditionnelle par rapport à une sous-tribu, sont des formes de Dirichlet dont on peut aisément écrire les semi-groupes de Markov associés.

Ceci nous conduit d'abord à une caractérisation des opérateurs auto-adjoints sur $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ dont la résolution de l'identité est une famille d'opérateurs d'espérances conditionnelles. Cette question posée en 1975 par C. Dellacherie et C. Stricker [2] a été résolue independamment par C. Dellacherie dont nous indiquons quelques-unes des démonstrations. Ces opérateurs sont les générateurs des semi-groupes de Markov symétriques indéfiniment subordonnés au sens de Bochner.

Ces semi-groupes peuvent aussi s'exprimer à l'aide d'une intégrale stochastique ce qui permet de retrouver la dualité entre h_1 et bmo et de mieux comprendre pourquoi les contractions opèrent sur bmo.

Enfin leurs noyaux de Lévy sont des intégrales de familles d'opérateurs d'espérances conditionnelles et ont la propriété de vérifier le principe complet du maximum. Cette propriété avait déjà été obtenu par G. Mokobodzki [3], qui nous a fait remarquer qu'elle provenait aussi d'une analogie purement formelle et apparemment non publiée que nous indiquons.

Rappelons en premier lieu que sur un espace de Hilbert il y a correspondance biunivoque entre

- les semi-groupes symétriques fortement continus à contraction,
- les opérateurs auto-adjoints de spectre dans $\mathbb{R}_-$,
- les formes bilinéaires symétriques positives fermées.

Le point de vue des espaces de Dirichlet est que lorsque l'espace de Hilbert est de la forme $L^2(\Omega,\mathscr{A},m)$ où m est une mesure positive σ-positive sur l'espace mesurable $(\Omega,\mathscr{A})$, cette correspondance se raffine en une bijection entre

i. les semi-groupes symétriques fortement continus à contraction sous-markoviens $(P_t)_{t \geq 0}$,

ii. les opérateurs de Dirichlet c'est-à-dire les opérateurs auto-adjoints A vérifiant

$$(Af,(f-1)^+) \leq 0$$

pour toute f du domaine $\mathscr{D}A$ de A , où $(.,.)$ désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega,\mathscr{A},m)$,

iii. les formes de Dirichlet c'est-à-dire les formes symétriques positives fermées Φ sur lesquelles les contractions normales opèrent, i.e. telles que

$$\exists\ u \in \mathscr{D}\,\Phi$$

$$\forall\ x \in \Omega\ |v(x)-v(y)| \leq |u(x)-u(y)| \text{ et } |v(x)| \leq |u(x)|$$

entraine

$$v \in \mathscr{D}\Phi \quad \text{et} \quad \Phi(v,v) \leq \Phi(u,u).$$ Voir [1] .

On a aussi bijection entre les semi-groupes tels que i) dont l'extension à L^∞ est un semi-groupe markovien, et les formes tels que iii) sur lesquelles toutes les contractions (pas nécessairement normales) opèrent.

I. FILTRATIONS ET RESOLUTIONS DE L'IDENTITE.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire réelle, en écrivant

$$\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{2}\iint (X(\omega) - X(\omega'))^2 \, d\mathbb{P}(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega')$$

on voit immédiatement que la variance est une forme bilinéaire symétrique de domaine $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ donc fermée sur laquelle les contractions opèrent.

Le semi-groupe de Markov associé est donné par

$$P_t X = e^{-t} X + (1-e^{-t}) \mathbb{E}X$$

de générateur infinitésimal $A = 1 \otimes \mathbb{P} - I$ borné.

De même soit $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$ et considérons le semi-groupe markovien symétrique fortement continu défini par

$$P_t X = e^{-t} X + (1-e^{-t}) \mathbb{E}^{\mathscr{B}} X$$

où $\mathbb{E}^{\mathscr{B}}$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{B}$, son générateur est $A = \mathbb{E}^{\mathscr{B}} - I$. Il est borné et vérifie $A = -\sqrt{-A}$. Quant à la forme de Dirichlet associée c'est la variance conditionnelle

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}^{\mathscr{B}} X)^2] .$$

Remarquons que :

LEMME 1. Si E est un projecteur autoadjoint de $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ dans lui-même, le semi-groupe $P_t = e^{-t} I + (1-e^{-t})E$ est de Markov [resp. sous-markovien] ssi E est un opérateur d'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^{\mathscr{B}}$ pour une sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ [resp. $E = 1_H . \mathbb{E}^{\mathscr{B}}$ pour $H \in \mathscr{B}$].

En effet, si P_t est de Markov, en faisant $t \uparrow \infty$, on voit que E est une projection orthogonale positive telle que $E1 = 1$ ce qui implique (cf. [4]) que $E = \mathbb{E}^{\mathscr{B}}$ pour une sous-tribu de $\mathscr{A}$.

Maintenant si $-A$ est un opérateur autoadjoint positif au sens hilbertien de représentation spectrale

$$-A = \int_{\mathbb{R}_+} u \, dE_u$$

où $(E_u)_{u \geq 0}$ est la famille continue à droite pour la topologie forte de projecteurs orthogonaux qui est la résolution de l'identité associée à $-A$, et si nous posons $f_s(u) = 1_{]s,\infty[}(u)$, nous avons

$$- f_s(-A) = - \int_{]s,\infty[} dE_u = E_s - I$$

générateur du semi-groupe du lemme 1. Ceci nous conduit au résultat suivant.

Nous appelons <u>opérateur de Dirichlet-Markov</u> les opérateurs de Dirichlet tels que $1 \in \mathcal{D}A$ et $A1 = 0$. Ce sont les générateurs infinitésimaux des semi-groupes fortement continus symétriques à contraction sur $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ markoviens.

<u>THEOREME 1</u>. Soit sur $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un opérateur autoadjoint positif $-A$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *la résolution de l'identité de $-A$ est induite par une filtration.*
2. *pour tout $t \geq 0$ les opérateurs $A_t = -1_{]t,\infty[}(-A)$ sont des opérateurs de Dirichlet-Markov,*
3. *pour toute fonction φ c à g, nulle en zéro, croissante sur $\mathbb{R}_+$, $-\varphi(-A)$ est un opérateur de Dirichlet-Markov,*

3 bis. *pour toute fonction φ c à d, croissante positive sur $\mathbb{R}_+$, $\varphi(0)I - \varphi(-A)$ est un opérateur de Dirichlet-Markov,*

4. *pour tout entier $n \geq 1$, $-(-A)^n$ est un opérateur de Dirichlet-Markov,*
5. *le sous-groupe P_t associé à A est tel que, pour tout $t > 0$, $-P_t^{-1}$ est un opérateur de Dirichlet,*

5 bis. *pour tout $t > 0$, P_t est markovien et vérifie le principe de domination,*

6. *$-P_1^{-1}$ est un opérateur de Dirichlet,*

6 bis. *P_1 vérifie le principe complet du maximum.*

<u>Démonstration</u>. Nous notons $(E_u)_{u \geq 0}$ la résolution de l'identité de $-A$.

• L'opérateur A_t du point 2 vaut $A_t = E_t - I$ générateur du semi-groupe $P_s = e^{-s}I + (1-e^{-s})E_t$, l'équivalence $1 \Leftrightarrow 2$ résulte donc du lemme 1.

• 3 contient 2. Pour montrer $2 \Rightarrow 3$ on peut remarquer que φ étant càg et $\varphi(0)$ étant nul

$$\varphi(s) = \int_{[0,\infty[} 1_{]t,+\infty[}(s) \quad d\varphi(t)$$

soit

$$-\varphi(-A) = \int_{[0,\infty[} A_t \, d\varphi(t)$$

donc la forme bilinéaire symétrique positive associée à $-\varphi(-A)$ est

$$(\varphi(-A)X,X) = \int (-A_t X,X) \, d\varphi(t).$$

Donc si les contractions opèrent sur les formes $(-A_t X,X)$ elles opérent sur $(\varphi(-A)X,X)$.

• Si on a 3bis, en prenant $\varphi(u) = 1_{[t,\infty[}(u)$ on a que le semi-groupe de générateur $E_{t-}-I$ est markovien dont E_{t-} est un opérateur d'espérance conditionnelle donc aussi E_t par continuité à droite.

Réciproquement si on a 1, les contractions opèrent sur les fromes $(-A_{t-}X,X)$ donc, en posant $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi(0)$, elles opèrent sur la forme $(\tilde{\varphi}(-A)X,X) = \int_{]0,\infty[} (-A_{u-}X,X) \, d\tilde{\varphi}(u)$,; d'où 3bis.

• Venons-en à l'implication $4 \Rightarrow 1$. La démonstration suivante est inspirée de celle de Dellacherie.

Si l'assertion 4 est vérifiée les opérateurs

$$\exp - t\left(\frac{-A}{u}\right)^n \quad t > 0, \ u > 0$$

sont positifs au sens des fonctions et valent 1 pour 1. Or lorsque $n \uparrow \infty$

$$\exp - t\left(\frac{x}{u}\right)^n \to 1_{[0,u[}(x) + e^{-t} \, 1_{[u]}(x)$$

en restant dominée par 1, donc $\exp - t\left(\frac{-A}{u}\right)^n$ converge fortement vers

$$\int \left[1_{[0,u[}(\lambda) + e^{-t} \, 1_{[u]}(\lambda)\right] dE_\lambda = E_{u-} + e^{-t}(E_u - E_{u-})$$

qui sont donc des opérateurs positifs au sens des fonctions valant 1 sur 1, en faisant $t \uparrow \infty$, il en est de même de E_{u-} donc de E_u par continuité à droite, d'où $4 \Rightarrow 1$.

• L'implication $1 \Rightarrow 5$ résulte de ce que

$$P_t^{-1} = \int e^{st} \, dE_s$$

donc d'après 3bis, $I - P_t^{-1}$ est un opérateur de Dirichlet-Markov donc $-P_t^{-1}$ est un opérateur de Dirichlet/

• Alors P_t est l'opérateur 1 - potentiel du semi-groupe de Markov de générateur $I - P_t^{-1}$, P_t vérifie donc le principe complet du maximum, donc de domination, on a $5 \Rightarrow 5$bis.

• D'après Dellacherie 5bis $\Rightarrow$ 1 peut s'obtenir rapidement de la façon suivante : Si on pose

$$C = - P_1^{-1} = - \int_{[0,\infty[} e^s \, dE_s ,$$

comme $P_n = P_1^n$ vérifie le principe de domination, $-(-C)^n$ est pour tout n le générateur d'un semi-groupe positif au sens des fonctions. Il résulte du raisonnement ulitisé pour $4 \Rightarrow 1$ que les projecteurs de la résolution de l'identité de $-C$ sont positifs au sens des fonctions donc aussi les E_t. Il résulte aisément de ce que P_t est markovien pour tout t que E_t aussi, d'où 5bis $\Rightarrow$ 1 .

• La démonstration de 6bis $\Rightarrow$ 1 est un peu plus longue : Si 6bis est vérifiée alors $-P_1^{-1} = -e^{-A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sous-markovien, donc par puissances fractionnaires, $-e^{-\alpha A}$ est un opérateur de Dirichlet pour $\alpha \in]0,1]$, autrement dit, $e^{-t\, e^{-\alpha A}}$ est un semi-groupe sous-markovien, d'où on tire aisément que $e^{-t(e^{-\alpha A}-I)}$ est un semi-groupe markovien.

On en déduit la propriété suivante

$$(*) \quad \begin{cases} e^{-t\left[e^{-\alpha A}-I-\alpha A-\ldots-\frac{\alpha^k}{k!}(-A)^k\right]\frac{1}{\alpha^{k+1}}} \\ \text{est un semi-groupe markovien et} \\ -(-A)^{k+1} \text{ est un opérateur de Dirichlet-Markov.} \end{cases}$$

En effet (*) est vraie pour $k = 0$ d'après ce qu'on vient de voir et parce que $A = -\log(1+(e^{-A}-1))$ or $\log(1+x)$ est une fonction de Bernstein.

Maintenant si (*) est vraie pour $k-1$, l'opérateur

$$e^{-t\,[e^{-\alpha A}-I-\ldots-\frac{\alpha^k}{k!}(-A)^k]\frac{1}{\alpha^{k+1}}}$$

$$= \exp\left\{-t\left[e^{-\alpha A}-I-\ldots-\frac{\alpha^{h-1}}{(k-1)!}(-A)^{k-1}\right]\frac{1}{\alpha^k}\cdot\frac{1}{\alpha}\right\} \exp\left\{-t\left[\frac{\alpha^k}{k!}(-A)^k\frac{1}{\alpha^{k+1}}\right]\right\}$$

est positif au sens des fonctions. Il suffit de faire tendre α vers zéro dans le 1er membre pour voir que

$$e^{-t(-A)^{k+1}/(k+1)!}$$

est un opérateur positif valant 1 sur la fonction 1.

La propriété (*) est donc établie pour tout k. Alors 6bis $\Rightarrow$ 1 résulte de $4 \Rightarrow 1$. □

<u>Remarque</u>. (Dellacherie). Dans le cas où A est borné on a encore l'équivalence avec

7. <u>Si</u> $B = -A/\|A\|$, <u>pour tout</u> n <u>l'opérateur</u> $I - B^n$ <u>est markovien</u>.

En effet $1 \Rightarrow 7$ résulte de

$$\int_{[0,1]} (1-s^n)\, dE_s = \int_{[0,1]} n\, s^{n-1} E_{s-}\, ds.$$

Quant à $7 \Rightarrow 1$, cela vient au fait que 7 entraine que pour chaque n, B^n est le générateur infinitésimal d'une chaine de Markov donc aussi du processus de sauts associé à cette chaine. $-(-A)^n$ est donc aussi le générateur d'un semi-groupe markovien.

<u>Notations</u>. Nous appellerons pour abréger
ODM l'ensemble des opérateurs de Dirichlet-Markov c'est-à-dire des générateurs infinitésimaux se semi-groupes symétriques fortement continus à contraction sur $L^2(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ markoviens, et
ORIF l'ensemble des opérateurs auto-adjoints négatifs au sens hilbertien dont la Résolution de l'Identité vient d'une Filtration.

Il est aisé de voir maintenant que les opérateurs ORIF sont les générateurs des semi-groupes symétriques <u>indéfiniment subordonnés</u>. On a plus précisément :

$$\text{ORIF} = \bigcap_{\substack{\psi \text{ de Bernstein} \\ \psi(0)=0}} -\psi(-\text{ODM})$$

ou encore

$$\hat{\text{ORIF}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} -(-\text{ODM})^{\frac{1}{n}}$$

En effet notons $\mathscr{C}$ le membre de droite de la 1ére égalité. Si $A \in \mathscr{C}$, $-\psi^{-1}(-A) \in$ ODM pour toute fonction de Bersntein nulle en zéro, donc $-(-A)^n \in$ ODM pour tout n donc $A \in$ ORIF

Réciproquement si $A \in$ ORIF alors $-\psi^{-1}(-A) \in$ ODM pour toute fonction de Bernstein nulle en zéro car alors ψ est croissante continue (voir [5]).

II. <u>BMO COMME INTERSECTION D'ESPACES DE DIRICHLET</u>.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles avec $\mathscr{F}_\infty$ complètée de $\bigvee_t \mathscr{F}_t$. On identifie les éléments de $L^2(\Omega, \mathscr{F}_\infty, \mathbb{P})$ et les martingales associées.

Les semi-groupes de la partie précédente étaient de la forme

$$P_t M = \int_{[0,\infty[} e^{-ts}\, dM_s$$

car il est facile de voir que si $M \in L^2$, l'intégrale spectrale au sens fort

$$\int_{[0,\infty[} e^{-ts}\, dE_s(M)$$

coïncide avec l'intégrale stochastique lorsque les $\mathbb{E}_s$ viennent d'une filtration.

Nous allons généraliser (d'ailleurs en apparence seulement) ces semi-groupes.

<u>LEMME 2</u>. *Soit* θ_t *un processus croissant prévisible (càd) nul en zéro, les opérateurs sur* $L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P})$ *définis par*

$$P_t^\theta\, M = \int_{[0,\infty[} e^{-t\theta_s}\, dM_s$$

forment un semi-groupe fortement continu symétrique à contraction markovien.

<u>Démonstration</u>. La propriété de semi-groupe, le caractère fortement continu à contraction sont immédiats ainsi que la symétrie puisque

$$(P_t^\theta M,N) = \mathbb{E}\, M_0 N_0 + \mathbb{E}\int_{]0,\infty[} e^{-t\theta_s}\, d\langle M,N\rangle_s .$$

Le caractère markovien peut se voir en intégrant par parties.

$$P_t^\theta M = e^{-t\theta_\infty} M_\infty 1_{\{\theta_\infty<+\infty\}} - \int_{]0,\infty[} M_{u^-}\, d\, e^{-t\theta_u}$$

puisque sur $]0,\infty[$ $u \to e^{-t\theta_u}$ est décroissante.

□

Le générateur de P_t^θ est

$$A^\theta M = -\int_{[0,\infty[} \theta_u\, d M_u \qquad \mathcal{D} A^\theta = \{M \in L^2 : \mathbb{E}\int \theta_u^2\, d\langle M,M\rangle_u < +\infty\}$$

et la forme de Dirichlet associée est

$$\Phi^\theta(M,N) = \mathbb{E}\int_{[0,\infty[} \theta_u\, d\langle M,N\rangle_u \qquad \mathcal{D}\Phi^\theta = \{M \in L^2 : \Phi^\theta(M,M) < +\infty\}$$

Il n'est pas difficile de voir que les opérateurs A^θ sont des ORIF. (Une façon pour cela consiste à subordonner P_t^θ par le subordinateur stable unilatéral d'ordre $\frac{1}{n}$, à constater que c'est $P_t^{(\theta^{\frac{1}{n}})}$, et à appliquer l'implication $4 \to 1$ du théorème 1).

La filtration qui leur correspond s'obtient par le changement de temps associé à θ_t à partir de $(\mathcal{F}_t)$ et par le théorème 1 on voit que si φ est croissante càd nulle en zéro

$$-\varphi(-A^\theta) = A^{\varphi\circ\theta} .$$

Notons h_1 l'espace des martingales locales localement de carré intégrable N telles que

$$\|N\|_{h_1} = \mathbb{E}\,[\langle N,N\rangle_\infty^{\frac{1}{2}}] < +\infty .$$

Notons la semi-norme associée à Φ^θ par

$$\| M \|_\theta = \sqrt{\Phi^\theta (M,M)} = [\mathbb{E} \int_{[0,\infty[} \theta_s \, d\langle M,M \rangle_s]^{\frac{1}{2}}$$

LEMME 3. Si $N \in h_1$, N est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Phi^{\sqrt{\langle N,N\rangle}})$ muni de sa semi-norme $\| \cdot \|_{\sqrt{\langle N,N\rangle}}$ et on a

$$\mathbb{E} \int_{[0,\infty[} | d\langle M,N \rangle_s | \le \sqrt{2} \, \| M \|_{\sqrt{\langle N,N\rangle}} \| N \|_{h_1}$$

Démonstration. Ceci résulte de l'inégalité de Kunita-Watanabe

$$\mathbb{E} \int_{[0,\infty]} |d\langle M,N \rangle_s| \le [\mathbb{E} \int_{[0,\infty[} (\sqrt{\langle N\rangle}_s + \sqrt{\langle N\rangle}_s + \varepsilon) \, d\langle M\rangle_s]^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times [\mathbb{E} \int_{[0,\infty[} \frac{1}{\sqrt{\langle N\rangle_s} + \sqrt{\langle N\rangle_{s-}} + \varepsilon} \, d\langle N\rangle_s]^{\frac{1}{2}}$$

en faisant décroitre ε vers zéro.

Notons en passant que l'inégalité de Kunita-Watanabe peut elle-même s'obtenir par changement de temps par la technique de Dellacherie-Stricker [2] à partir de l'inégalité spectrale

$$\int_0^\infty |f(\lambda)| \, |g(\lambda)| \, |d(E_\lambda u,v)| \le [\int_0^\infty |f(\lambda)|^2 \, d(E_\lambda u,u)]^{\frac{1}{2}}$$
$$[\int_0^\infty |g(\lambda)| \, d(E_\lambda u,v)]^{\frac{1}{2}} .$$

□

Selon notre approche, il apparaît plus naturel de ne définir sur bmo qu'une semi-norme plutôt que de restreindre bmo aux martingales nulles en zéro (car alors les contractions n'opèrent plus) ou d'adopter diverses conventions.

DEFINITION. bmo est l'espace des martingales M de L^2 telles que $\mathbb{E}[(M_\infty - M_T)^2 | \mathcal{F}_T] \le c^2$ pour tout temps d'arrêt T de $(\mathcal{F}_t)$, la plus petite constante c positive étant prise pour la semi-norme $\|M\|_{bmo}$.

Il est facile de voir (cf. [6] chap. VI § 3) que c'est l'espace des martingales de carré intégrable telles que la projection prévisible des processus

$$\langle M,M \rangle_\infty - \langle M,M \rangle_-$$

soit bornée par une constante dont la plus petite est $\|M\|^2_{bmo}$. Donc par le théorème de section prévisible, on a que $M \in$ bmo ssi $M \in L^2$ et

$$\mathbb{E} \int_0^\infty (\langle M,M \rangle_\infty - \langle M,M \rangle_s) \, d\theta_s = \mathbb{E} \int_0^\infty \theta_s \, d\langle M,M \rangle_s = \Phi^\theta (M,M)$$

est fini pout tout processus croissant prévisible intégrable nul en zéro. On a donc

THEOREME 2. $bmo = \bigcap_{\theta} \mathscr{D}\Phi^{\theta}$

et $\|M\|_{bmo} = \sup_{\theta} \frac{\Phi^{\theta}(M,M)}{\mathbb{E}\,\theta_{\infty}}$

l'intersection et le sup étant pris sur l'ensemble des processus croissants prévisibles nuls en zéro intégrables.

Il en résulte d'abord que si on muni bmo de la norme $\|\cdot\|_{bmo,\alpha} = \alpha\|\cdot\|_{L^2} + \|\cdot\|_{bmo}$ $(\alpha > 0)$ cela en fait un espace de Banach puisque c'est une enveloppe supérieure de normes d'espaces de Banach qui s'injectent continument dans L^2.

Il en résulte ensuite que les contractions opèrent sur bmo :

COROLLAIRE 1. *Soit* F *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n \qquad |F(x) - F(y)| \leq \sum_i |x_i - y_i|$$

alors si $X_1,\dots,X_n \in$ *bmo la variable* $Y = F(X_1,\dots,X_n)$ *est dans bmo et*

$$\|Y\|_{bmo} \leq \sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_{bmo} .$$

De même les normes $\|\cdot\|_{bmo,\alpha}$ sont diminuées par les contractions normales.

Le lemme 3 et le théorème 2 donnent immédiatement l'inégalité de Feffermann.

COROLLAIRE 2. $E\int_0^{\infty} |d\langle M,N\rangle_s| \leq \sqrt{2}\ \|M\|_{bmo}\ \|N\|_{h_1}$

(où comme il est naturel on prend $\langle M\rangle_0 = 0$*)* .

Il en résulte que bmo est contenu dans le dual de h_1. Il reste pour établir la dualité h_1, bmo à montrer par des "variables test" que toute forme linéaire continue sur h_1 vient d'une variable de bmo, ce qui est classique et que notre approche ne modifie pas.

<u>Remarque 1</u>. Il s'agit ici des espaces h_1 et bmo <u>obliques</u>. L'espace H_1 droit est défini de même avec le crochet droit et l'espace BMO est le sous-espace de bmo des martingales bornées en zéro et à sauts bornés.

La théorie est moins simple avec BMO droit car les contractions n'opèrent dessus qu'avec une constante strictement plus grande que 1 comme on peut le voir grâce à l'exemple explicite de [7].

Remarque 2. Aux semi-groupes P_t^θ sur $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ la théorie de Littlewood-Paley-Stein s'applique. Les inégalités relatives aux fonctions de Littlewood-Paley ont des démonstrations directes simples par inégalité de martingales. L'opérateur carré du champ de P_t^θ est donné par

$$\begin{aligned}\Gamma^\theta(M,M) &= \int_0^\infty [M_s^2 - 2\, M_\infty\, M_{t-} + \mathbb{E}(M_\infty^2 \,|\mathscr{F}_{t-})]\, d\theta_t \\ &= \int_0^\infty (I + \mathbb{E}^{\mathscr{F}_{t-}})\ [(M_\infty - M_{t-})^2]\, d\theta_t\ .\end{aligned}$$

Si T est un temps d'arrêt prévisible, le semi-groupe obtenu par $\theta_t = 1_{[[T,\infty[[}(t)$ donne un exemple simple de semi-groupe pour lequel on a

$$\| \sqrt{-A}\, M \|_p \leq \| \sqrt{\Gamma(M,M)} \|_p \qquad \forall\ p \in [1,\infty]$$

$$\| \sqrt{\Gamma(M,M)} \|_p \leq 2 \| \sqrt{-A}\, M \|_p \quad \text{si} \quad p \geq 2$$

mais où en revanche il n'existe pas (sauf si $\mathbb{P}$ ne charge qu'un ensemble fini) de constantes c_p telles que

$$\| \sqrt{\Gamma(M,M)} \|_p \leq c_p \| \sqrt{-A}\, M \|_p \quad \text{si} \quad p < 2$$

(voir [8]).

III. ESPERANCES CONDITIONNELLES ET PRINCIPE COMPLET DU MAXIMUM.

Dans cette partie nous nous plaçons sous des hypothèses telles qu'on puisse construire des processus de Markov dont les probabilités de transition réalisent les semi-groupes que nous avons introduits.

Ces hypothèses ont été étudiées par P.A. Meyer ([8] in fine) qui montre qu'elles sont satisfaites dès que $\mathscr{F}_\infty$ est séparable aux $\mathbb{P}$-négligeables près. Ce sont exactement les hypothèses de [2]. Voir aussi à ce sujet [3] appendice.

A. Considérons alors sur $(\Omega,\mathscr{F}_\infty,\mathbb{P})$ le semi-groupe donné par

$$P_t M = \int_{[0,\infty[} e^{-g(s)\,t}\, d\, M_s$$

où g est croissante càd nulle en zéro, c'est un cas particulier de ceux étudiés en II, son opérateur λ-potentiel est donné par

$$U\ \ M = \int_{[0,\infty[} \frac{1}{\lambda+g(s)}\, d\, Ms = \frac{M}{\lambda+g(\infty)} - \int_{]0,\infty[} M_{s-}\ d\, \frac{1}{\lambda+g(s)}\ .$$

On obtient ainsi tous les opérateurs de la forme

$$N = \int_{]0,\infty]} \mathbb{E}^{\mathscr{F}_{s-}} \, d\mu(s)$$

pour une mesure μ positive finie sur $]0,\infty]$.

Par ailleurs le caractère continu à droite du processus θ utilisé dans la partie II n'est là que pour faciliter l'étude de bmo. Les semi-groupes P_t définis par exemple par

$$P_t M = M_0 + \int_{]0,\infty[} e^{-g(s-)t} \, dM_s$$

pour g croissante càd nulle en zéro, sont également de Markov (et leurs générateurs sont aussi des ORIF). Leur λ-potentiels sont tous les opérateurs de la forme $\int_{]0,\infty]} \mathbb{E}^{\mathscr{F}_t} \, d\mu(t)$ pour une mesure μ positive finie sur $]0,\infty]$. En changeant de filtration on peut aussi bien fermer l'intervalle en zéro. On a donc

<u>*THEOREME 3*</u>. *Les opérateurs de la forme*

$$N = \int_{]0,\infty]} \mathbb{E}^{\mathscr{F}_{s-}} \, d\mu(s) \quad ou \quad N = \int_{[0,\infty]} \mathbb{E}^{\mathscr{F}_s} \, d\mu(s)$$

pour μ mesure positive finie, vérifient le principe complet du maximum au sens suivant.

Pour toutes f,g $\mathscr{F}_\infty$-mesurables positives et $a > 0$

$$(a + Nf \geq Ng \ \text{ sur } \ \{g > 0\} \ \mathbb{P}.p.s.) \Rightarrow (a + Nf \geq Ng \ \ \mathbb{P}.ps)$$

B. Ce résultat est énoncé sous une forme voisine avec une démonstration complètement différente par G. Mokobodzki [3] qui nous a fait remarquer qu'on pouvait l'obtenir encore d'une troisième manière par l'analogie purement algèbrique suivante :

a) Sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, on considère l'opération interne $s \wedge t = \inf(s,t)$ et la "convolution" qui s'en déduit entre mesures bornées

$$< \mu * \nu, f > = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} f(s \wedge t) \, d\mu(s) \, d\nu(t) \ .$$

L'élément neutre de cette convolution est la masse de Dirac à l'infini $\delta_{\{\infty\}}$.

Associons à la mesure μ le noyau N_μ donné par

$$N_\mu f(t) = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} f(t \wedge s) \, d\mu(s) \ ,$$

alors si μ est une mesure bornée telle que

$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu^{*n}$$

pour une sous-probabilité ν , on a immédiatement

$$N_\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} N_\nu^n$$

noyau positif borné vérifiant le principe complet du maximum, il résulte donc du théorème de Hille-Yosida l'existence d'un semi-groupe sous-markovien P_t tel que

$$N_\mu = \int_0^\infty P_t \, dt \; .$$

Il n'est pas difficile de se convaincre que les noyaux P_t sont de la forme N_{μ_t} pour un semi-groupe de sous-probabilités μ_t au sens de cette convolution $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$ avec

$$\mu = \int_0^\infty \mu_t \, dt \; .$$

b) Considerons alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F}_t$ ainsi que des opérateurs E_t qui sont des noyaux positifs vérifiant $E_t \, E_s = E_s \, E_t = E_{s \wedge t}$ et tels que E_t soit une version du pseudo noyau $E^{\mathcal{F}_t}$.

L'application $t \to E_t$ étant un morphisme pour l'opération $\wedge$ et la composition des opérateurs, les opérateurs

$$Q_t = \int E_s \, d\mu_t(s)$$

forment un semi-groupe sous-markovien de noyau potentiel

$$U = \int E_s \, d\mu(s)$$

d'où il résulte que $\int E_s \, d\mu(s)$ vérifie le principe complet du maximum et le même raisonnement s'applique au E_{s-} .

c) Reste à voir quelles mesures μ sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ on peut atteindre ainsi.

L'application qui à μ associe la fonction

$$\hat{\mu}(x) = \mu([x,\infty])$$

joue le rôle de transformée de Fourier, est injective et transforme convolution en produit.

Soit μ une mesure positive bornée sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, si nous posons pour $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et $\lambda > 0$,

$$b(x) = \frac{1}{\lambda + \hat{\mu}(x)} \quad \text{et} \quad \hat{\nu}_t(x) = e^{-tb(x)}$$

cela définit un semi-groupe ν_t de sous-probabilités sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ alors on a

$$\mu = \int \mu_t \, dt \quad \text{avec} \quad \mu_t = e^{-\lambda t} \nu_t$$

on atteint donc toute mesure bornée sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ par ce procédé.

C. NOYAUX DE LEVY. Nous terminons par une remarque concernant les processus de Markov qui, sous les hypothèses de cette partie, peuvent être associés aux semi-groupes qui nous étudions. Soit A un ORIF opérateur auto-adjoint négatif dont la résolution de l'identité vient de la filtration $\mathcal{F}_t$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, notons P_t le semi-groupe de Markov et ξ_t le processus associés.

D'après [9] P_t étant un semi-groupe (indéfiniment) subordonné, le processus ξ_t est de type Lebesgue et sans diffusion, c'est à dire que les martingales de sa réalisation sont purement discontinues et de crochet oblique absolument continu. Il possède donc un noyau de Lévy par rapport à la fonctionnelle additive canonique identique à t .

En examinant les détails on voit que ce noyau de Lévy $N(\omega, d\omega)$ peut s'écrire

$$N = \int_0^\infty E_t \, dt$$

où les E_t sont une famille mesurable de noyaux markoviens qui précisent les pseudo-noyaux $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}$.

Ceci constitue un exemple de noyau qui, agissant à droite sur les fonctions, est tel que

$$Nf \equiv +\infty \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

pour toute f mesurable telle que $f > 0$ $\mathbb{P}$ p.s. , mais qui en revanche est bien défini sur les mesures et est tel que la mesure $\varepsilon_\omega N$ est σ-finie sur $\Omega \setminus \{\omega\}$ de sorte que si $f(\omega, \omega')$ est mesurable nulle sur la diagonale et strictement positive ailleurs l'intégrale

$$\int N(\omega, d\omega') \, f(\omega, \omega')$$

peut être finie.

En particulier on a

$$\int N(\omega, d\omega')(M(\omega) - M(\omega'))^2 = \int_0^\infty E_t(\omega, d\omega')(M(\omega) - M(\omega'))^2 \, dt$$

$$= \int_0^\infty (M_\infty^2 - 2\, M_\infty M_t + E_t M_\infty^2) \, dt \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

$$= \int_0^\infty [(M_\infty - M_t)^2 + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(M_\infty - M_t)^2] \, dt \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

expression qui est le carré du champ $\Gamma(M,M)$ fini dès que M_∞ est $\mathcal{F}_s$-mesurable avec s fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOULEAU N., HIRSCH F.

- Formes Dirichlet générales et densité des variables aléatoires réelles sur l'espace de Wiener. (à paraître dans le Jour. Funct. Analysis).

[2] DELLACHERIE C., STRICKER C.

- Changements de temps et intégrales stochastiques. Sem. prob. XI Lect. notes in math. 581 Springer (1977).

[3] MOKOBODZKI G.

- Densité relative de deux potentiels comparables obtenue sans filtres rapides. Sem. Analyse fonct. G. Choquet 8ème année 1968/69 N° 1.

[4] J. NEVEU.

- Martingales à temps discret. Masson (1972).

[5] BERG C., FORST G.

- Potential theory on locally compact abelian groups. Springer (1975).

[6] DELLACHERIE C., MEYER P.A.

- Probabilités et potentiel, théorie des martingales. Hermann (1980).

[7] DELLACHERIE C., MEYER P.A., YOR M.

- Sur certaines propriétés des espaces H_1 et BMO. Sem. prob. XII Lect. notes in math. 649 Springer (1978).

[8] MEYER P.A.

- Retour sur la théorie de Littlewood-Paley. Sem. prob. XV Lect. notes in math. 850 Springer (1981).

[9] BOULEAU N.

- Quelques résultats probabilistes sur la subordination au sens de Bochner. Sem. th. du potentiel n° 7, Lect. Notes in math. 1061, Springer (1984).